

19 図形の性質 (1)

163

$$\angle ACD = \alpha \text{ とすると, } \angle AEB = 4\alpha \quad \dots \textcircled{1} \quad \angle ABE = 2\alpha \quad \dots \textcircled{2}$$

四角形 ADFE について, 円に内接する四角形の性質より,

$$\angle BDF = \angle AEF \quad \therefore \angle BDF = \angle AEB = 4\alpha \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\angle DAE = \angle DFB \quad \therefore \angle DFB = \angle BAC \quad \dots \textcircled{4}$$

$\angle BDF$ は $\triangle ACD$ の外角だから,

$$\textcircled{3} \text{ より, } \angle DAC = \angle BDF - \angle ACD = 4\alpha - \alpha = 3\alpha \quad \therefore \angle BAC = 3\alpha \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\triangle DBF \text{ の内角の和および} \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より, } \angle DFB = 180^\circ - 6\alpha$$

$$\text{これと} \textcircled{5} \text{ より, } \angle DFB = 180^\circ - 2\angle BAC \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\text{よって, } \textcircled{4} \text{ と} \textcircled{6} \text{ より, } 180^\circ - 2\angle BAC = \angle BAC \quad \therefore \angle BAC = 60^\circ$$

164

(1)

$$\triangle CAB \sim \triangle CDE \text{ より, } \frac{CD}{CA} = \frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$

$$\text{したがって, } AE = x, CD = y \text{ とおくと, 条件より } \frac{y}{14} = \frac{x}{\frac{42}{5}} = \frac{14-x}{y + \frac{6}{5}}$$

$$\frac{y}{14} = \frac{x}{\frac{42}{5}} = \frac{14-x}{y + \frac{6}{5}} = k \text{ とおくと,}$$

$$y = 14k \quad \dots \textcircled{1} \quad x = \frac{42}{5}k \quad \dots \textcircled{2} \quad 14 - x = \left(y + \frac{6}{5}\right)k \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を} \textcircled{3} \text{ に代入すると, } 14 - \frac{42}{5}k = \left(14k + \frac{6}{5}\right)k \text{ より, } \frac{2}{5}(5k+7)(7k-5)=0$$

$$\text{よって, } k > 0 \text{ より, } k = \frac{5}{7}$$

$$\text{これを} \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ に代入することにより, } x = 6, y = 10 \quad \therefore AE = 6, CD = 10$$

(2)

$$\triangle CED \text{ について, (1) より, } CE = 8, ED = 6, DC = 10$$

$$\text{よって, 三平方の定理 } CE^2 + ED^2 = DC^2 \text{ が成り立つことから, } \angle CED = 90^\circ$$

$$\text{したがって, } \triangle AED \text{ は } AE = ED = 6, \angle AED = 90^\circ \text{ の直角二等辺三角形である。}$$

$$\text{よって, } AD = 6\sqrt{2}$$

$$\triangle AED \text{ は円 } O \text{ に内接するから, } AD \text{ は円 } O \text{ の直径である。}$$

$$\text{ゆえに, 円 } O \text{ の半径は } 3\sqrt{2}$$

165

(1)

$t=t_0$ のときチェバの定理が成り立つから, $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$ より, $\frac{2}{1} \cdot \frac{t_0}{1-t_0} \cdot \frac{1}{3} = 1$

$$\text{よって, } \frac{t_0}{1-t_0} = \frac{3}{2} \quad \therefore t_0 = \frac{3}{5}$$

(2)

$\triangle AEC$ と直線 BF について, メネラウスの定理より, $\frac{AP}{PE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$

よって, $\frac{AP}{PE} = \frac{BC}{EB} \cdot \frac{FA}{CF} = \frac{1}{t} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{t}$ より, $AP : AE = 3 : t+3$

$$\text{ゆえに, } AP = \frac{3}{t+3} AE \quad \therefore k = \frac{3}{t+3}$$

$\triangle CDB$ と直線 AE について, メネラウスの定理より, $\frac{CR}{RD} \cdot \frac{DA}{AB} \cdot \frac{BE}{EC} = 1$

よって, $\frac{CR}{RD} = \frac{AB}{DA} \cdot \frac{EC}{BE} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-t}{t} = \frac{3(1-t)}{2t}$ より, $CR : CD = 3(1-t) : 3-t$

$$\text{ゆえに, } CR = \frac{3(1-t)}{3-t} CD \quad \therefore l = \frac{3(1-t)}{3-t}$$

(3)

$\triangle ADC$ と直線 BF について, メネラウスの定理より, $\frac{AB}{BD} \cdot \frac{DQ}{QC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$

よって, $\frac{DQ}{QC} = \frac{BD}{AB} \cdot \frac{FA}{CF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1} = 1$ より, Q は線分 CD の中点である。

$$\text{ゆえに, } \triangle ABCQ = \frac{1}{2} \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot \frac{DB}{AB} \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

(4)

$$\triangle ABP = \frac{AP}{AE} \triangle ABE = \frac{3}{t+3} \cdot \frac{BE}{BC} \triangle ABC = \frac{3}{t+3} \cdot t \cdot 1 = \frac{3t}{t+3}$$

$$\triangle ARC = \frac{CR}{CD} \triangle ADC = \frac{3(1-t)}{3-t} \cdot \frac{AD}{AB} \triangle ABC = \frac{3(1-t)}{3-t} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2-2t}{3-t}$$

これと(3)より,

$$\triangle PQR = \triangle ABC - (\triangle ABP + \triangle ARC + \triangle ABCQ) = 1 - \left(\frac{3t}{t+3} + \frac{2-2t}{3-t} + \frac{1}{6} \right) = \frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)}$$

166

$\triangle ANC$ と $\triangle ACM$ について,

$$\angle CAN = \angle MAC \text{ (共通角)} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$AB = AN - NB = 2NB - NB = NB \text{ より, } AN = 2NB = 2AB$$

$$\text{これと } AB = AC \text{ より, } AN : AC = 2 : 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$AC = AB = 2AM \text{ より, } AC : AM = 2 : 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

①～③より, 対応する 2 辺の比とその間の角の大きさがそれぞれ等しい。

よって, $\triangle ANC \sim \triangle ACM$

また, 相似比は $2 : 1$

$$\text{ゆえに, } NC : CM = 2 : 1$$

$$\text{これと, } MB : BN = \frac{1}{2}AB : AB = 1 : 2 \text{ より,}$$

$\triangle CMN$ において, $CM : CN = MB : BN$ が成り立つ。

したがって, CB は $\angle MCN$ の 2 等分線である。

よって, $\angle BCM = \angle BCN$

167

(1)

$$\triangle AMC \text{ と直線 } BQ \text{ について, メネラウスの定理より, } \frac{AP}{PM} \cdot \frac{MB}{BC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

$$\text{よって, } \frac{QC}{AQ} = \frac{PM}{AP} \cdot \frac{BC}{MB} = \frac{t}{1} \cdot \frac{2}{1} = 2t$$

(2)

$$(1) \text{ と同様にして, } \frac{RB}{AR} = 2t \quad \therefore \frac{QC}{AQ} = \frac{RB}{AR} = 2t \quad \therefore RQ \parallel BC$$

ゆえに,

$$\triangle MQR = \triangle CQR$$

$$\begin{aligned} &= \frac{QC}{AC} \triangle ARC \\ &= \frac{QC}{AC} \cdot \frac{AR}{AB} \triangle ABC \\ &= \frac{2t}{2t+1} \cdot \frac{1}{2t+1} \cdot 1 \\ &= \frac{2t}{(2t+1)^2} \\ &= \frac{1}{2t + \frac{1}{2t} + 2} \end{aligned}$$

ここで、 $t > 0$ より、 $2t + \frac{1}{2t} \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{2t}} = 2$ (相加平均 $\geq$ 相乗平均)

等号成立は $2t = \frac{1}{2t}$ のとき、すなわち $t = \frac{1}{2}$ のとき

$$\text{よって、} \Delta MQR = \frac{1}{2t + \frac{1}{2t} + 2} \leq \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

ゆえに、 $t = \frac{1}{2}$ で三角形 MQR の面積は最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

168

(1)

$$\begin{aligned} \angle AIB &= 180^\circ - (\angle IAB + \angle IBA) \\ &= 180^\circ - \left(\frac{1}{2} \angle CAB + \frac{1}{2} \angle CBA \right) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle CAB + \angle CBA) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ACB) \\ &= 90^\circ + \angle ACB \end{aligned}$$

ここで、 $\angle ACB$ は弧 AB の円周角だから一定である。

したがって、 $\angle AIB$ は一定である。

よって、I の軌跡は 2 点 A と B を含むある円周上の一部となる。

(2)

内接円の半径を r とすると、 r は I と直線 AB の距離である。

I の軌跡を含むある円を C 、その中心を O' とし、 O' を通り、直線 AB に平行な直線を l 、 l と直線 AB の距離を d_1 、I と l の距離を d_2 とすると、 $r = d_2 - d_1$

A, B は定点だから、 d_1 は一定である。

したがって、 d_2 が最大するとき r も最大となる。

d_2 は、円 C の半径と等しいとき、最大となり、

このとき直線 IO' と l は直交するから、直線 IO' は弦 AB とも直交する。

したがって、このときの直線 IO' は弦 AB の垂直 2 等分線である。

よって、 $\triangle IAB$ は $IA = IB$ の二等辺三角形であり、

二等辺三角形の性質により $\angle IAB = \angle IBA$ が成り立つ。

ゆえに、 $2\angle IAB = 2\angle IBA$ すなわち $\angle CAB = \angle CBA$ が成り立つ。

これは $\triangle ABC$ が $AC = BC$ の二等辺三角形であることと同値である。

よって、内接円の半径が最大となるのは $AC = BC$ となるときである。